MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 14
5.2.2020

Tutorium zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Um zur Bestimmung von σ^{2020} nicht 2020 Faktoren multiplizieren zu müssen, wäre es nützlich, zu wissen, welche Potenzen von σ die Identität sind – wir sollten also die *Ordnung* von σ bestimmen. Dies geht am einfachsten, indem wir σ als Produkt disjunkter Zyklen schreiben (denn dann ist die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache der Längen dieser Zyklen). Aber es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7)$, also ist die Ordnung von σ gleich 3 und damit $\sigma^3 = \mathrm{id}$. Wegen $2020 = 673 \cdot 3 + 1$ gilt damit

$$\sigma^{2020} = \sigma^{673\cdot 3+1} = (\sigma^3)^{673} \circ \sigma^1 = \mathrm{id}^{673} \circ \sigma = \mathrm{id} \circ \sigma = \sigma.$$

Außerdem ist (wir lesen σ bzw. τ „von unten nach oben“) also

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 1 & 8 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Es muß

$$\begin{aligned} \alpha = \sigma^{-1} \circ \tau &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \beta = \tau \circ \sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 7 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sein.

c) Es ist $\sigma = (2\ \ 4\ \ 8) \circ (3\ \ 5\ \ 7) = (2\ \ 4) \circ (4\ \ 8) \circ (3\ \ 5) \circ (5\ \ 7)$ sowie $\tau = (1\ \ 3\ \ 6\ \ 2\ \ 7) \circ (4\ \ 8) = (1\ \ 3) \circ (3\ \ 6) \circ (6\ \ 2) \circ (2\ \ 7) \circ (4\ \ 8)$ und damit $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$ (denn es sind 4 Transpositionen, und 4 ist eine gerade Zahl) sowie $\mathrm{sign}(\tau) = -1$ (denn es sind 5 Transpositionen, und 5 ist eine ungerade Zahl).

Damit kann es aber kein $\psi \in S_8$ geben mit $\sigma \circ \psi = \psi \circ \tau$: Denn dann wäre (durch Anwenden der Funktion sign auf beide Seiten der Gleichung und Verwenden von 6.14a))

$$\begin{aligned} & \mathrm{sign}(\sigma \circ \psi) = \mathrm{sign}(\psi \circ \tau) \\ \Longrightarrow\quad & \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\psi) = \mathrm{sign}(\psi) \cdot \mathrm{sign}(\tau) \\ \Longrightarrow\quad & \mathrm{sign}(\psi) = -\,\mathrm{sign}(\psi), \end{aligned}$$

was unmöglich ist.

d) Es ist

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ 3\ 8\ 2\ 6) \circ (4\ 5) \qquad \text{Zerlegung in } \textbf{disjunkte} \text{ Zyklen}$$

Wir haben also ρ als Prudukt **disjunkter** Zyklen der Länge 5 und 2 geschrieben; damit ist die Ordnung von ρ gleich

$$\mathrm{kgV}(5,2) = 10.$$

2. Wir gehen wie im Beispiel zur S_5 aus der Vorlesung (nach 6.17) vor:
Wir geben also zunächst die Zyklusdarstellungen aller Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau k Fixpunkten ($k = 0, 1$) an und zählen danach, wieviele verschiedene Permutationen eines jeden Typs es jeweils gibt.

Wieder sei $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, und es seien jeweils $a, b, c, d, e, f \in M$ paarweise verschieden.

- $k = 0$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 0$ Fixpunkten „bewegt“ alle 6 Zahlen $a, b, c, d, e, f \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten

$$\begin{array}{rll} \text{i)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f) & \text{(6-Zyklus)} \\ \text{oder}\ \ \text{ii)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(ein 4-Zyklus und ein 2-Zyklus)} \\ \text{oder}\ \ \text{iii)} & \sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e\ \ f) & \text{(zwei 3-Zyklen)} \\ \text{oder}\ \ \text{iv)} & \sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) & \text{(drei 2-Zyklen).} \end{array}$$

(Diese Vielzahl von Möglichkeiten könnte uns auf die Idee bringen, diese Permutationen dieses Typs nicht Fall für Fall zu zählen, sondern ihre Anzahl nach Erledigung aller anderen Fälle aus der *Gesamtzahl* $6! = 720$ von Permutationen in S_6 zu erschließen.)

Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \; = \; 120,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{6} = 1$ Möglichkeit, 6 Zahlen aus M für den 6-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ auszuwählen.
Zum Zählen der 6-Zyklen $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e\ \ f)$ bemerken wir, daß wir ihn stets so schreiben können, daß er die Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ hat, also mit a (z.B. $a = 1$) beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 5 Möglichkeiten, für die dritte noch 4, für die vierte noch 3, für die fünfte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 6-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 6-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \; \cdot \; \binom{2}{2} \cdot 1 \; = \; 90,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten, 4 Zahlen aus M für den 4-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d)$ auszuwählen.
Nun kann jeder 4-Zyklus bei fest gewählten a, b, c, d in der Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ geschrieben werden, also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 4-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d\}$.
Danach gibt es $\binom{2}{2} = 1$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den 2-Zyklus $(e\ \ f)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

Anzahl der σ in iii):

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \; \cdot \; \binom{3}{3} \cdot 2 \cdot 1 \; \cdot \frac{1}{2} = \; 40,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den ersten 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{3}{3}$ Möglichkeiten, 3 weitere Zahlen aus M für den zweiten 3-Zyklus $(d\ \ e\ \ f)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Der Faktor $\frac{1}{2}$ erklärt sich dadurch, daß durch dieses Auswahlverfahren jedes σ doppelt gezählt wurde, da ja $(a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e\ \ f) = (d\ \ e\ \ f) \circ (a\ \ b\ \ c)$ ist (z.B.: im ersten Schritt wählt man $1, 2$ und 3 aus, im zweiten Schritt $4, 5$ und 6, und bildet daraus $(1\ \ 2\ \ 3) \circ (4\ \ 5\ \ 6)$; wählt man nun im ersten Schritt $4, 5$ und 6 aus, im zweiten Schritt $1, 2$ und 3, so erhält man die Permutation $(4\ \ 5\ \ 6) \circ (1\ \ 2\ \ 3)$, die identisch mit der vorherigen ist, aber nochmal neu gezählt worden ist.)

Anzahl der σ in iv):

$$\binom{6}{2} \cdot 1 \ \cdot \ \binom{4}{2} \cdot 1 \ \cdot \ \binom{2}{2} \cdot 1 \ \cdot \frac{1}{3!} \ = \ 15,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten, 2 Zahlen aus M für den ersten 2-Zyklus $(a\ \ b)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den zweiten 2-Zyklus $(d\ \ e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden, und schließlich noch $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den dritten 2-Zyklus $(e\ \ f)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden. Der Faktor $\frac{1}{3!}$ erklärt sich dadurch, daß durch dieses Auswahlverfahren jedes σ 6-fach gezählt wurde, da es $3! = 6$ Möglichkeiten gibt, ein und dasselbe $\sigma = (a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f)$ durch Vertauschung der Reihenfolge der Transpositionen zu bekommen (es ist ja $(a\ \ b) \circ (c\ \ d) \circ (e\ \ f) = (a\ \ b) \circ (e\ \ f) \circ (c\ \ d) = (c\ \ d) \circ (a\ \ b) \circ (e\ \ f) = \ldots$).

Also gibt es insgesamt $120 + 90 + 40 + 15 = 265$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 0$ Fixpunkten.

- $k = 1$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 1$ Fixpunkten „bewegt" 5 Zahlen $a, b, c, d, e \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten:

	i) $\sigma = (a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$	(5-Zyklus)
oder	ii) $\sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e)$	(ein 3-Zyklus und ein 2-Zyklus).

Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{5} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \ = \ 144,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten, 5 Zahlen (Trägermenge) aus M für den 5-Zyklus $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ auszuwählen.
Zum Zählen der 5-Zyklen $(a\ \ b\ \ c\ \ d\ \ e)$ bemerken wir, daß wir ihn stets so schreiben können, daß er die Form $(a\ \ ?\ \ ?\ \ ?\ \ ?)$ hat, also mit a (z.B der kleinsten Zahl) beginnt. Für die nächste Zahl gibt es dann 4 Möglichkeiten, für die dritte noch 3, für die vierte noch 2, und die letzte ist dann festgelegt. Diese 5-Zyklen sind auch alle verschieden, daher gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene 5-Zyklen bei gegebener Trägermenge $\{a, b, c, d, e\}$.

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot 2 \cdot 1 \ \cdot \binom{2}{2} \cdot 1 \ = \ 120,$$

denn: Es gibt $\binom{6}{5}$ Möglichkeiten, 5 Zahlen (Trägermenge) aus M für $\sigma = (a\ \ b\ \ c) \circ (d\ \ e)$ auszuwählen. Dann gibt es weiter $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus diesen 5 für den 3-Zyklus $(a\ \ b\ \ c)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{2}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus den restlichen 2 für den 2-Zyklus $(d\ \ e)$

auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

[*Es ist auch eine leicht andere Zählweise möglich, bei der wir die 3 Zahlen a, b, c für der 3-Zyklus sowie die restlichen 2 Zahlen d, e für den 2-Zyklus direkt aus M auswählen, uns also den Zwischenschritt über die Trägermenge sparen. Dann haben wir die*

Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \binom{3}{2} \cdot 1 \;=\; 120,$$

denn: es gibt $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten, 3 Zahlen aus M für den 3-Zyklus $(a\;\;b\;\;c)$ auszuwählen, und $2 \cdot 1$ Möglichkeiten, aus diesen einen 3-Zyklus zu bilden. Danach gibt es $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, 2 weitere Zahlen aus M für den zweiten 2-Zyklus $(d\;\;e)$ auszuwählen, und 1 Möglichkeit, aus diesen einen 2-Zyklus zu bilden.

... und wir erhalten das gleiche Ergebnis. Beachte, daß ja gilt: $\binom{6}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} \;=\; \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}$.]

Also gibt es insgesamt $144 + 120 = 264$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 1$ Fixpunkt.

Wir präsentieren nun noch der Vollständigkeit halber die Anzahlen für die restlichen $k = 2, 3, 4, 5, 6$; das Abzählschema ist erkennbar und wiederholt sich, weshalb wir uns auf die Angabe des Ergebnisses beschränken.

- $k = 2$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 2$ Fixpunkten „bewegt" 4 Zahlen $a, b, c, d \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{array}{rll} \text{i)} & \sigma = (a\;\;b\;\;c\;\;d) & \text{(4-Zyklus)} \\ \text{oder}\quad \text{ii)} & \sigma = (a\;\;b) \circ (c\;\;d) & \text{(zwei 2-Zyklen).} \end{array}$$

Anzahl der σ in i):

$$\binom{6}{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 90,$$

und
Anzahl der σ in ii):

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \binom{2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \overset{\text{oder so:}}{=} \binom{6}{2} \cdot 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \;=\; 45.$$

Also gibt es insgesamt $90 + 45 = 135$ Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 2$ Fixpunkten.

- $k = 3$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 3$ Fixpunkten „bewegt" 3 Zahlen $a, b, c \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir nur die folgende Möglichkeit:

$$\sigma = (a\;\;b\;\;c) \qquad\qquad \text{(3-Zyklus)}$$

Anzahl dieser σ:

$$\binom{6}{3} \cdot 2 \cdot 1 \;=\; 40.$$

Also gibt es 40 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 3$ Fixpunkten.

- $k = 4$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 4$ Fixpunkten „bewegt“ 2 Zahlen $a, b \in M$; um diese auf (paarweise) disjunkte Zyklen der Länge ≥ 2 zu verteilen, haben wir nur die folgende Möglichkeit:

  $$\sigma = (a \;\; b) \qquad\qquad \text{(2-Zyklus)}$$

  Anzahl dieser σ:

  $$\binom{6}{2} \cdot 1 \;=\; 15.$$

  Also gibt es 15 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 4$ Fixpunkten.

- $k = 5$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 5$ Fixpunkten gibt es nicht, denn wenn 5 Zahlen $a, b, c, d, e \in M$ festbleiben sollen, gilt automatisch für die übriggebliebene Zahl f ebenfalls $\sigma(f) = f$, und damit hätte σ nicht 5 sondern 6 Fixpunkte.

  Also gibt es 0 Permutationen $\sigma \in S_6$ mit genau $k = 5$ Fixpunkten.

- $k = 6$: Ein $\sigma \in S_6$ mit $k = 6$ Fixpunkten „bewegt“ $6 - 6 = 0$ Zahlen, ist also die Identität.

  Also gibt es 1 Permutation $\sigma \in S_5$ mit genau $k = 5$ Fixpunkten.

Zur Kontrolle berechnen wir die Summe aller Ergebnisse – da jede Permutation in S_6 zwischen 0 und 6 Fixpunkte hat, müssen wir insgesamt alle Permutationen in S_6 erwischt haben. Und tatsächlich ist $265 + 264 + 135 + 40 + 15 + 1 = 720$, und da S_6 genau $6! = 720$ Elemente hat, sind uns keine Permutationen durch die Lappen gegangen.

3. a) Es ist für alle $\sigma \in S_n$

   $$f(f(\sigma)) = f(\sigma \circ (1 \;\; 2)) = \sigma \circ \underbrace{(1 \;\; 2) \circ (1 \;\; 2)}_{\text{id}} \;=\; \sigma.$$

   Also ist nach 4.18b) (mit $g := f$) die Abbildung f bijektiv mit $f^{-1} = f$.

   b) Wir zeigen $\underline{f(A_n) \subset S_n \backslash A_n}$:

   Sei $\sigma \in A_n$. Dann ist $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ und

   $$\operatorname{sign}(f(\sigma)) = \operatorname{sign}(\sigma \circ (1 \;\; 2)) \overset{6.14a)}{=} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}((1 \;\; 2)) = 1 \cdot (-1) = -1,$$

   also ist $f(\sigma) \in S_n \backslash A_n$ ✓.

   Wir zeigen nun $\underline{S_n \backslash A_n \subset f(A_n)}$:

   Sei $\rho \in S_n \backslash A_n$, also $\operatorname{sign}(\rho) = -1$. Dann gilt mit $\sigma := \rho \circ (1 \;\; 2)$, daß nach 6.14

   $$\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\rho) \cdot \operatorname{sign}((1 \;\; 2)) = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad \text{also} \quad \sigma \in A_n,$$

   und

   $$f(\sigma) = \sigma \circ (1 \;\; 2) = \rho \circ (1 \;\; 2) \circ (1 \;\; 2) = \rho.$$

   Also ist $\rho \in f(A_n)$. ✓

   c) Die Mengen S_n und $S_n \backslash A_n$ sind natürlich disjunkt, und es gilt

   $$S_n = A_n \cup (S_n \backslash A_n),$$

   also

   $$|S_n| = |A_n| + |S_n \backslash A_n|.$$

Da f bijektiv, ist aber wegen b)

$$|A_n| = |f(A_n)| \overset{\text{b)}}{=} |S_n \backslash A_n|,$$

also gilt

$$|S_n| = |A_n| + |S_n \backslash A_n| = |A_n| + |A_n| = 2 \cdot |A_n|,$$

also

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} \; = \; \frac{n!}{2},$$

da $|S_n| = n!$.

4. a) i) Für $f(1)$ haben wir 5 Möglichkeiten, ebenso für $f(2)$ und $f(3)$; also gibt es

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \; = \; 125$$

Abbildungen $f : M \longrightarrow N$.

Das dahinterstehende Zugexperiment im Urnenmodell ist dieses:
Wir ziehen aus einer Urne mit 5 Kugeln (mit den Zahlen 1,2,3,4,5; in der Urne befinden sich also die Elemente der Zielmenge) 3-mal **mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge**: Im 1. Zug ziehen wir den Funktionswert $f(1)$, im 2. Zug $f(2)$ und schließlich im 3. Zug $f(3)$.

ii) Für $f(1)$ haben wir nach wie vor 5 Möglichkeiten, für $f(2)$ allerdings nur noch 4, weil $f(2) \neq f(1)$ gelten muß (wegen f injektiv). Für $f(3)$ sind es dann nur noch 3 Möglichkeiten; also gibt es

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \; = \; 60$$

injektive Abbildungen $f : M \longrightarrow N$.

Das dahinterstehende Zugexperiment im Urnenmodell ist wie in a), nur, daß wir jetzt <u>**ohne**</u> **Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge** ziehen!

iii) Da

$$|\text{Quelle}| = |M| = 3 < 5 = |N| = |\text{Ziel}|$$

gibt es **keine** surjektive Abbildung $f : M \longrightarrow N$.

b) Die kombinatorische Begründung der angegebenen Formel

$$a_{nk} \; = \; k^n - \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot a_{ni}$$

geht folgendermaßen:

Mit $|X_n| = n$ und $|X_k| = k$ ist

$$k^n \quad = \quad \text{Anzahl aller Abbildungen} \;\; f : X_n \longrightarrow X_k.$$

Von dieser Anzahl ziehen wir die Anzahl der nicht-surjektiven Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$ ab; dabei unterscheiden wir nach der Anzahl i der Elemente in X_k die von einer nicht-surjektiven Abbildung getroffen werden, $i = 1, 2, .., k-1$:

i=1: Es ist

$$\binom{k}{1} \; = \; \text{Auswahl eines Elementes aus } X_k \text{, z.B.} \quad a \in X_k.$$

Dann ist a_{n1} die Anzahl der Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die **nur genau** dieses eine Element a treffen,
denn: es gibt genauso viele Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die nur das Element a treffen, wie es surjektive Abbildungen $X_n \longrightarrow \{a\}$ gibt, also a_{n1} Stück.

i=2: Es ist
$$\binom{k}{2} = \text{ Auswahl von 2 Elementen aus } X_k, \text{ z.B. } \quad a, b \in X_k.$$
Dann ist a_{n2} die Anzahl der Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die **nur genau** diese zwei Elemente a, b treffen,
denn: es gibt genauso viele Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die nur die Elemente a, b treffen, wie es surjektive Abbildungen $X_n \longrightarrow \{a, b\}$ gibt, also a_{n2} Stück.

i=3: Es ist
$$\binom{k}{3} = \text{ Auswahl von 3 Elementen aus } X_k, \text{ z.B. } \quad a, b, c \in X_k.$$
Dann ist a_{n3} die Anzahl der Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die **nur genau** diese drei Elemente a, b, c treffen,
denn: es gibt genauso viele Abbildungen $f : X_n \longrightarrow X_k$, die nur die Elemente a, b, c treffen, wie es surjektive Abbildungen $X_n \longrightarrow \{a, b, c\}$ gibt, also a_{n3} Stück.

i=4,...,k-1: ganz analog!

Insgesamt haben wir also
$$\underbrace{a_{nk}}_{\text{Anz. surj. Abb. f}} = \underbrace{k^n}_{\text{Anz. aller. Abb. f}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} \cdot a_{ni}}_{\text{Anz. nicht-surj. Abb. f}}$$

Wir bestimmen nun die Anzahl der surjektiven Abbildungen
$$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \longrightarrow \{1, 2, 3\}.$$
Es ist also $n = 5$ und $k = 3$; gefragt ist a_{53}. Wir bestimmen nach der Formel dann sogar alle $a_{51}, a_{52}, a_{53}, a_{54}, a_{55}$:
$$\begin{aligned}
a_{51} &= 1^5 - 0 \quad (\text{leere Summe}) \ = \ 1 \\
a_{52} &= 2^5 - \binom{2}{1} \cdot a_{51} \ = \ 32 - 2 \cdot 1 \ = \ 30 \\
a_{53} &= 3^5 - \binom{3}{1} \cdot a_{51} - \binom{3}{2} \cdot a_{52} \ = \ 243 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 30 \ = \ 150 \\
a_{54} &= 4^5 - \binom{4}{1} \cdot a_{51} - \binom{4}{2} \cdot a_{52} - \binom{4}{3} \cdot a_{53} \ = \ 1024 - 4 \cdot 1 - 6 \cdot 30 - 4 \cdot 150 \ = \ 240 \\
a_{55} &= 5^5 - \binom{5}{1} \cdot a_{51} - \binom{5}{2} \cdot a_{52} - \binom{5}{3} \cdot a_{53} - \binom{5}{4} \cdot a_{54} \\
&= \ 3125 - 5 \cdot 1 - 10 \cdot 30 - 10 \cdot 150 - 5 \cdot 240 \ = \ 120 = 5!
\end{aligned}$$

Eine Bemerkung: a_{55} *ist die Anzahl der surjektiven Abbildungen* $f : X_5 \longrightarrow X_5$*; nachdem aber jede surjektive Abbildung* $f : X_n \longrightarrow X_n$ *auch injektiv ist (weil Quelle und Ziel endlich sind und dieselbe Mächtigkeit besitzen), ist dies also auch die Anzahl aller injektiven Abbildungen* $f : X_5 \longrightarrow X_5$*, also* $5!$*, wie sich aus der Formel auch ergibt.*